Lineare Algebra
Höheres Niveau

Lineare Abbildungen
Eigenwerte und Eigenvektoren
Übungsaufgaben
Auch mit komplexen Zahlen

Sehr viele Beispiele – viele Themen

Eine Fundgrube für Studenten

Datei Nr. 62202

Stand 25. Juni 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Inhalt

		Aufgaben	Lösungen
1.	Aufgaben zu den Grundlagen	3	11 bis 16
2.	Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{R}^{3x3}$	4	17 bis 33
3.	Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times4}$	6	34 bis 41
4.	Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{C}^{2x2}$	7	42 bis 43
5.	Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{C}^{3x3}$	8	44 bis 47
6.	Spezielle Aufgabenstellungen	9	48 bis 54

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Aufgaben zu den Grundlagen

Aufgabe 1.1

L: 11

Die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist zu untersuchen.

a) Ist sie linear? b) injektiv? c) surjektiv?

d) Stelle f durch eine Matrixgleichung dar e) Bestimme den Kern von f.

Aufgabe 1.2

Welche dieser Abbildungen sind linear?

L: 12

1.2.1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1.2.2 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

1.2.3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$

1.2.4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

1.2.5 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = 2x_1 - 5x_2$

1.2.6 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

1.2.7 $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit $f(\vec{x}) = \overline{\vec{x}}$ (konjugiert komplex)

Aufgabe 1.3

Gibt es eine lineare Abbildung f mit

L: 14

a) $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

b) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -13 \\ a \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2a \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.4

Bestimme Bild und Kern der linearen Abbildung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$

L: 16

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{R}^{3x3}$

Aufgabe 2.1

L: 17

Die Abbildung f wird definiert durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne das Bild von $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und das Urbild von $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.
Welche algebraische und welche geometrische Vielfachheit haben die Eigenwerte?

c) Bestimme die Matrizen S und D, so dass D eine Diagonalmatrix ist und gilt: $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 2.2

L: 20

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ist die Abbildung f: $\vec{x} \to A \cdot \vec{x}$ ein Automorphismus?

Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2.3

L: 22

Untersuche die Abbildung f: $\vec{x} \to A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Stelle f ohne Matrix dar. Was folgt über injektiv, surjektiv?
Ist f umkehrbar? Berechne den Kern von f.

b) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2.4

L: 24

Gegeben ist die Abbildung f $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

a) Zeige, dass f nicht umkehrbar ist. Bestimme den Kern von f:

b) Bestimme eine Basis des Bildraums von f.

c) Berechne das Urbild zu $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zu $\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche Vektoren haben unendlich viele Urbilder? Beweise Deine Antwort.

d) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von f.
Bilden die zu $\lambda \neq 0$ gehörenden Eigenvektoren eine Basis des Bildraums?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 2.5

L: 28

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimme zu eine Diagonalmatrix D sowie die Transformationsmatrix S mit $D = S^{-1}AS$.

Bestimme den Kern von f.

Aufgabe 2.6

L: 31

Gegeben sei f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

bzgl. der Standardbasis.

a) Bestimme Kern und Bild von f bzw. A. Gib det(A) ohne Berechnung an.

b) Ist f injektiv bzw. surjektiv?

c)) Welche Matrix A* gehört zu f, wenn man in die Basis $B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ wechselt?

Aufgabe 2.7

L: 35

Gegeben sei f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die Eigenwerte und die zugehörenden Eigenvektoren.
Welche Dimension hat der jeweilige Eigenvektorraum?

b) Berechne im zugehörigen **affinen Punktraum** $\mathbb{R}^3$
Fixpunkte, Fixgeraden und Fixebenen.

Warum ist die affine Abbildung nicht umkehrbar?
Welche Konsequenzen hat dies für viele Punkte, gib ein Zahlenbeispiel an.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3. Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$

Aufgabe 3.1

L: 38

Gegeben ist die lineare Abbildung $f:\ \vec{x} \to A\cdot\vec{x}$ des $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

und Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Berechne $f(\vec{a})$. Zeige, dass $\vec{b}$ im Kern von f liegt.

Ist f injektiv?

b) Bestimme die Dimension des Bildes von f und gib eine Basis an.

c) Bestimme die Dimension des Kerns von f und gib eine Basis an.

d) Für welche Vektoren gilt $f(\vec{x}) = \vec{c}$?

Aufgabe 3.2

L: 41

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung f mit $\vec{x} \to A\cdot\vec{x}$

des $\mathbb{R}^4$ in sich selbst. Ferner sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Berechne $f(\vec{a})$ und $f(\vec{b})$

b) Bestimme Dimension und eine Basis des Bildes und des Kerns von f.

c) Ermittle die Vektoren $\vec{x}$, deren Bild $\vec{c}$ ist.

Aufgabe 3.2

L: 44

Es sei $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ durch $f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bestimme die Eigenwerte und die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A.

Ist A diagonalisierbar?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

4. Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{C}^{2x2}$

Aufgabe 4.1

L: 46

Gegeben ist die lineare Abbildung f durch $f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

a) Bestimme die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Um was für eine Abbildung handelt was sich im affinen Raum $\mathbb{R}^2$?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

5. Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{C}^{3x3}$

Aufgabe 5.1

L: 48

Gegeben ist die Abbildung $f_{a,b}$ durch $f_{a,b}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \vec{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

a) Berechne für a = 1 und b = i das Bild von $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$

sowie für a = b = i das Bild von $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$

Untersuche, ob zu den berechneten Bildvektoren umgekehrt mehrere Urbilder existieren.

b) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) Bestimme die Anzahl der Eigenwerte in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe 5.2

L: 50

Gegeben sei f: $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ durch $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die Eigenwerte und die zugehörenden Eigenvektoren.

Welche Dimension hat der jeweilige Eigenvektorraum?

b) Bestimme den Kern der Abbildung.

Aufgabe 5.3

L: **52**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Berechne die Eigenwerte und den zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenvektor.

b) Ist A diagonalisierbar?

c) Zeige, dass A invertierbar ist.

d) Berechne die Eigenwerte der Matrix $B = (3E - A) \cdot (2E - A) + E$

wobei E die 3×3 – Einheitsmatrix ist.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

6. Spezielle Aufgabenstellungen

Aufgabe 6.1

L: 54

Gegeben sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{a} \neq \vec{o}$. f sei die Abbildung $f(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$.

a) Berechne die Abbildungsmatrix für f.

b) Kann $\vec{a}$ als Bildvektor auftreten?

c) Bestimme Basis und Dimension des Kerns von f.

Aufgabe 6.2

L: 55

Gegeben ist f durch $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme ihre Eigenwerte in Abhängigkeit von a.

b) Bestimme die Eigenvektoren für a = 0 und $\lambda = 1$, sowie für a = 1 und $\lambda = 1$

c) Welche Vektoren werden auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ abgebildet? Erkläre den Ausnahmefall.

Welche Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ besitzen kein Urbild?

Aufgabe 6.3

L: 57

Die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ definiert.

a) g sei die Verkettung $f \circ f$. Bestimme die Zuordnungsvorschrift.

b) Wie hängen die Matrizen von f und von g zusammen?

c) Bestimme Ker(g) und den Bildraum(g).

Aufgabe 6.4

L: 58

Gegeben sind zwei lineare Abbildungen: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g:: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

durch $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ und $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die Abbildungsmatrix für $g \circ f$ bezüglich der Standardbasis.

b) Bestimme eine Basis des Kerns von g und des Bildraums von g.

c) Hat $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Urbild bzgl. g?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 6.5

L: 59

Die lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^3$ wird definiert durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$

a) Bringen Sie die Abbildungsgleichung in Matrixform.

b) Berechnen Sie den Bildvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Urbilder von $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Finden Sie eine Basis des Kerns von f und des Bildes von f.

Aufgabe 6.6

L: 61

Bestimmen Sie Rang, Kern und Bild der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Aufgaben zu den Grundlagen

Aufgabe 1.1

Die Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist zu untersuchen.

a) Ist sie linear? b) injektiv? c) surjektiv?

d) Stelle f durch eine Matrixgleichung dar e) Bestimme den Kern von f.

a) Ist sie linear?

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(r \cdot \vec{x}) = \begin{pmatrix} r \cdot x_1 \\ r \cdot x_2 \\ r \cdot x_1 + r \cdot x_2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = r \cdot f(\vec{x})$$

Also ist f **<u>linear</u>**: f ist ein **<u>Homomorphismus</u>**.

b) Ist f injektiv?

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

Also ist f injektiv.

c) Ist f surjektiv?

Es sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann kann $\vec{w}$ nicht als Bild auftreten, weil bei einem Bildvektor von f die 3. Koordinate die Summe der ersten beiden sein muss. Also ist f auch nicht bijektiv, also kein Isomorphismus.

d) Stelle f durch eine Matrix-Gleichung dar.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e) Bestimme den Kern von f.

Der Kern ist die Menge der Vektoren aus $\mathbb{R}^2$, deren Bild der Nullvektor ist.

Da f injektiv ist, enthält der Kern nur den Nullvektor.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 1.2

Welche dieser Abbildungen sind linear?

1.2.1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1.2.2 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

1.2.3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$

1.2.4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

1.2.5 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = 2x_1 - 5x_2$

1.2.6 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

1.2.7 $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit $f(\vec{x}) = \overline{\vec{x}}$ (konjugiert komplex)

Lösungen:

1.2.1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 + 1 \\ x_1 + y_1 \\ x_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 + 1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 + \boxed{2} \\ x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \neq f(\vec{x} + \vec{y}): \quad \text{Nicht linear}$$

1.2.2 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) \\ (x_1 + 2x_2 - x_3) + (y_1 + 2y_2 - y_3) \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(r \cdot \vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ rx_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} rx_1 - rx_2 + rx_3 \\ rx_1 + 2rx_2 - rx_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = r \cdot f(\vec{x})$$ **f ist linear!**

1.2.3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ f ist nicht linear, denn:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)^2 \\ (x_2 + y_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 \\ x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2.4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ f ist nicht linear, denn:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)-(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{x_1x_2+x_1y_2+x_2y_1+y_1y_2} \\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ (x_1-x_2)+(y_1-y_2) \end{pmatrix}$$

$$f(x)+f(y) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \cdot y_2 \\ y_1+y_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2} \\ x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1-x_2+y_1-y_2 \end{pmatrix}$$

Die 1. Koordinate ist verschieden.

1.2.5 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = 2x_1 - 5x_2$ f ist linear, denn es gilt:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = 2\cdot(x_1+y_1) - 5\cdot(x_2+y_2) = (2x_1-5x_2)+(2y_1-5y_2) = f(\vec{x})+f(\vec{y})$$

$$f(r\cdot\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} r\cdot x_1 \\ r\cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = 2\cdot(r\cdot x_1) - 5\cdot(r\cdot x_2) = 5\cdot(2x_1-5x_2) = r\cdot f(\vec{x})$$

1.2.6 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ f ist nicht linear, denn:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{(x_1+y_2)^2+(x_1+y_2)^2}$$

$$f(\vec{x})+f(\vec{y}) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$ Die Ergebnisse sind verschieden.

1.2.7 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\vec{x}) = \overline{\vec{x}}$ (konjugiert komplex)

Es sei $\vec{x} = a+b\cdot i$ Dann ist $f(\vec{x}) = a-b\cdot i$

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(a+b\cdot i+c+d\cdot i) = f((a+c)+(b+d)\cdot i) = (a+c)-(b+d)\cdot i$$

$$f(\vec{x})+f(\vec{y}) = (a-b\cdot i)+(c-d\cdot i) = (a+c)-(b+d)\cdot i$$

$$f(r\cdot\vec{x}) = f(r\cdot(a+b\cdot i)) = f(ra+rb\cdot i) = ra-rb\cdot i = r\cdot(a-b\cdot i) = r\cdot f(\vec{x})$$

f ist linear!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 1.3

Gibt es eine lineare Abbildung f mit

a) $f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$?

b) $f\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

c) $f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-13\\a\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3\\2a\end{pmatrix}$

Lösungen:

f bildet ab: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ansatz: $f(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{u} + x_2 \cdot \vec{v}$

a) $f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ (1)

$f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{u}+2\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (2)

$f\left(\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow 6\vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ (3)

(1) – (2): $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

In (2): $2\vec{u}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 2\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Probe in (3): $6\vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Ergebnis: f kann keine lineare Abbildung sein.

b) $f\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (1)

$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (2)

$f\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow 5\vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ (3)

$\vec{u}$ in (1): $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 3\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

Probe in (3): $5\vec{u}+3\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ wahre Aussage!

Ergebnis: f ist eine lineare Abbildung.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

c) $f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-13\\a\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3\\2a+3\end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-13\\a\end{pmatrix} \Leftrightarrow -\vec{u}+4\vec{v}=\begin{pmatrix}-13\\a\end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3\\2a\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\vec{u}+2\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\2a+3\end{pmatrix} \qquad (3)$$

(1) + 2(2): $9\vec{v}=\begin{pmatrix}-27\\8+2a\end{pmatrix} \quad |\ :9$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{8+2a}{9}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

(3) + 3(2): $14\vec{v}=\begin{pmatrix}-42\\5a+3\end{pmatrix} \quad |\ :14$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{5a+3}{14}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

(4) und 85) vergleichen: $\frac{8+2a}{9}=\frac{5a+3}{14}$

$$14\cdot(8+2a)=9\cdot(5a+3)$$

$$112+28a=45a+27$$

$$85=17a \quad\Rightarrow\quad a=5$$

Also ist $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Aus (2) folgt: $2\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Die lineare Abbildung ist: $f(\vec{x})=x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

bzw. $f(\vec{x})=\begin{pmatrix}1&-3\\3&2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 1.4

Bestimme Bild und Kern der linearen Abbildung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Lösung:

Es gilt auch $f(\vec{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das Bild von f ist daher $U = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ und hat die Dimension 1.

Für den Kern von f gilt die Bedingung:

$$f(\vec{x}) = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1 .$$

Wählt man $x_1 = s \in \mathbb{R}$, dann folgt $x_2 = -s$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Kern und Bild haben die Dimension 1.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Aufgaben zu Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Aufgabe 2.1

Die Abbildung f wird definiert durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne das Bild von $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und das Urbild von $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.
Welche algebraische und welche geometrische Vielfachheit haben die Eigenwerte?

c) Bestimme die Matrizen S und D, so dass D eine Diagonalmatrix ist und gilt: $A = SDS^{-1}$.

LÖSUNG:

a) $f(\vec{c}) = A \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+12-24 \\ 12-12 \\ -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{x}) = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 6 \\ -3x_2 - 3x_2 = -3 \end{pmatrix}$

1. Lösung durch Determinanten:

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 6 \\ 0 & 6 \\ 0 & -3 \end{matrix} = -54 + 0 + 0 - 0 + 54 - 0 = 0$

Also manuelle Lösung. Vereinfachung der Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_2 = 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Gleichung (3) entfällt, daher ist eine Variable frei wählbar.

Wähle $x_3 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = 1 - r$

Aus (1) folgt dann: $x_1 = -2x_2 - 4x_3 = -2(1-r) - 4r = -2r - 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r-2 \\ 1-r \\ r \end{pmatrix}$

2. Lösung nach Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} :3 \\ :6 \\ :(-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -Z2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2\cdot Z2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zeile 2: $x_2 + x_3 = 1$ Wähle $x_3 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = 1 - r$

Zeile 1: $x_1 + 2x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = -2 - 2r$ - Lösungsvektor siehe oben.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

b) Eigenwertsystem: $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{o}$

Bed. Für nicht-triviale Lösungen: $\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 6 & 12\\ 0 & 6-\lambda & 6\\ 0 & -3 & -3-\lambda\end{pmatrix}=0$

Linke Seite: $\begin{vmatrix}3-\lambda & 6 & 12\\ 0 & 6-\lambda & 6\\ 0 & -3 & -3-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}3-\lambda & 6\\ 0 & 6-\lambda\\ 0 & -3\end{matrix}=(3-\lambda)(6-\lambda)(-3-\lambda)+18\cdot(3-\lambda)=$

$=(3-\lambda)\cdot\left[(6-\lambda)(-3-\lambda)+18\right]=(3-\lambda)\cdot\left[\lambda^2-3\lambda\right]=(3-\lambda)\cdot\lambda\cdot(3-\lambda)$

Charakteristisches Polynom: $(3-\lambda)^2\cdot\lambda$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen davon: $\lambda_1=3$ mit der algebraischen Vielfachheit 2

$\lambda_2=0$ mit der algebraischen Vielfachheit 1.

Berechnung der Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1=3$ lautet das Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix}0 & 6 & 12\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6\end{pmatrix}\cdot\vec{u}=\vec{o}$

Das zugehörige Gleichungssystem besteht aus drei Gleichungen, die alle Vielfache von

$$x_2+2x_3=0$$

sind. Man kann daher x_1 frei wählen: $x_1=r,\ r\in\mathbb{R}$ und z.B. $x_3=s,\ s\in\mathbb{R}$.

Dann folgt $x_2=-2s$.

Eigenvektoren sind: $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}r\\ -2s\\ s\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u})=3\cdot\vec{u}$.

Der zugehörige Eigenraum hat die Dimension 2 und die Basis $\left\{\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

Also hat der Eigenwert 3 die geometrische Vielfachheit 2.

Zu $\lambda_2=0$ lautet das Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix}3 & 6 & 12\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot\vec{u}=\vec{o}$

Nach Gauß: $\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 12 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}-Z2\\ :6\\ +\frac{1}{2}Z2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

Wählt man $x_3=t,\ t\in\mathbb{R}$, dann liefert die 2. Zeile: $x_2=-t$ und die 1. Zeile $x_1=-2t$.

Eigenvektoren sind dann $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}-2t\\ -t\\ t\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ mit $f(\vec{u}_2)=0\cdot\vec{u}_2=\vec{o}$.

Der zugehörige Eigenraum ist also der Kern von f und besteht aus allen Vielfachen von $\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

Der Eigenwert 0 hat also die algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

c) Daher kann man A diagonalisieren.

Dazu muss man drei linear unabhängige Eigenvektoren als Basisvektoren nehmen:

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Stellt man dann einen Vektor durch diese Basis B dar, dann gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3 = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{B}} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Und $f(\vec{x}) = f\left(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3\right) = y_1 \cdot f\left(\vec{b}_1\right) + y_2 \cdot f\left(\vec{b}_2\right) + y_3 \cdot f\left(\vec{b}_3\right)$

$$= y_1 \cdot 3\vec{b}_1 + y_2 \cdot 3\vec{b}_2 + y_3 \cdot 0\vec{b}_3 = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_B$$

Also lautet dann die Abbildungsmatrix $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und ist eine Diagonalmatrix.

Geht man von der Standardbasis $E = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ aus

Demo-Text für www.mathe-cd.de